4.计算下列积分

> 1.
>
> $$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx &= \int_{0}^{1} x^m P_n(x)dx + \int_{-1}^{0} x^m P_n(x)dx \\ &= (1+(-1)^{m+n})\int_{0}^{1} x^m P_n(x)dx\end{aligned}$$

利用

$$\int_{0}^{1} x^m P_n(x)dx = \frac{m}{m+n+1}\int_{0}^{1} x^{m-1} P_{n-1}(x)dx$$

$m<n$时

$$\int_{0}^{1} x^m P_n(x)dx = \frac{m!(n-m+1)!!}{(m+n+1)!!}\int_{0}^{1} P_{n-m}(x)dx$$

利用

$$\int_{0}^{1} P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & n=2k \\ \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!} & n=2k+1 \end{cases}$$

若$n-m$为偶数, $\int_0^1 P_n(x)dx=0$; 若为奇数, $(1+(-1)^{m+n})=0$, 则得到

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx = 0$$

$m \geq n$时

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} x^m P_n(x)dx &= \frac{m!}{(m-n)!}\frac{(m-n+1)!!}{(m+n+1)!!}\int_{0}^{1} x^{m-n}dx \\ &= \frac{m!}{(m-n+1)!}\frac{(m-n+1)!!}{(m+n+1)!!} \\ &= \frac{m!}{(m-n+1)!!(m-n)!!}\frac{(m-n+1)!!}{(m+n+1)!!} \\ &= \frac{m!}{(m-n)!!(m+n+1)!!}\end{aligned}$$

得到结果

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx = \frac{m![1+(-1)^{m+n}]}{(m-n)!!(m+n+1)!!}$$

> 2.
>
> $$\int_{-1}^{1} xP_m(x)P_n(x)dx$$

$$I=\int_{-1}^{1} xP_m(x)P_n(x)dx = \int_{-1}^{1} P_n(x)[\frac{m+1}{2m+1}P_{m+1}(x)+\frac{m}{2m+1}P_{m-1}(x)]dx$$

若$n=m+1$

$$I=\frac{m+1}{2m+1}\int_{-1}^{1}P_{m+1}^{2}(x)dx=\frac{m+1}{2m+1}\frac{2}{2m+3}$$

若$m=n-1$

$$I=\frac{m}{2m+1}\int_{-1}^{1}P_{m-1}^{2}(x)dx=\frac{m}{2m+1}\frac{2}{2m-1}$$

若$m-n\neq\pm1$

$$I=0$$

> 3.
>
> $$\int_{-1}^{1}(1-x^2)[P_n'(x)]dx$$

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^{1}(1-x^2)[P_n'(x)]dx\\&=\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)dP_n(x)\\&=(1-x^2)P_n'(x)P_n(x)|_{-1}^{1}-\int P_n(x)[(1-x^2)P_n(x)]'dx\end{aligned}$$

注意到$P_n(x)$本身满足Legendre方程

$$[(1-x^2)P_n(x)]'=-n(n+1)P_n(x)$$

得到

$$I=n(n+1)\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

5.把下列函数按Legendre函数系展开

> 1.
>
> $$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leq x<1\\0, & -1<x<0\end{cases}$$

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{0}^{1}xP_n(x)dx$$

$n=0$时

$$C_0=\frac{1}{4}$$

$n>0$时

$$C_n=\frac{2n+1}{2(n+2)}\int_{0}^{1}P_{n-1}(x)dx$$

利用

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \frac{1}{2} & n=1 \\ 0 & n=2k \\ \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!} & n=2k+1 \end{cases}$$

得到

$$C_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=1 \\ \frac{5}{16} & n=2 \\ 0 & n=2k+1 \\ \frac{4k+1}{4k+4}\frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{(2k)!!} & n=2k, k=1,2,\dots \end{cases}$$

得到结果

$$f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n+2)!!}\frac{4n+1}{2}P_{2n}(x)$$

> 2.
>
> $$f(x) = x^3, -1 < x < 1$$

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^1 x^3 P_n(x)dx$$

利用第一题结果, 得到

$$C_n = \begin{cases} 0 & n=0,2\text{或}\, n>3 \\ \frac{3}{5} & n=1 \\ \frac{2}{5} & n=3 \end{cases}$$

> 3.
>
> $$f(x) = |x|, -1 < x < 1$$

$$C_n = \int_{-1}^1 |x| P_n(x)dx = \frac{(2n+1)(1+(-1)^n)}{2}\int_0^1 xP_n(x)dx$$

同1, 得到结果

$$f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n+2)!!}(4n+1)P_{2n}(x)$$

其中

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n+2)!!}(4n+1) = \frac{(4n+1)(2n-2)!}{(2n+2)!!(2n-2)!!} = \frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}$$

得到答案结果.

6. 解下列定解问题

> 1.
>
> $$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 & r < a \\ u|_{r=a} = \cos^2\theta \end{cases}$$

球内通解为

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n r^n P_n(\cos\theta)$$

带入边界条件

$$\cos^2\theta=\sum_{n=0}^{\infty}C_n a^n P_n(\cos\theta)$$

尝试将系数组合出来, 已知

$$P_0(\cos\theta)=1 \quad P_2(\cos\theta)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

得到

$$\cos^2\theta=\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)$$

比对得到系数

$$C_0=\frac{1}{3} \quad C_2=\frac{2}{3}\frac{1}{a^2}$$

得到结果

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta)$$

> 2.
>
> $$\begin{cases}\Delta_3 u=0, & r>1\\ u|_{r=1}=\cos^2\theta, & \\ u|_{r=+\infty}=0. & \end{cases}$$

球外通解为

$$u(r,\theta)=C_0+\sum_{n=0}^{\infty}D_n r^{-n-1}P_n(\cos\theta)$$

由$u|_{r=\infty}=0$可以得到

$$C_0=0$$

带入边界条件

$$\cos^2\theta=\sum_{n=0}^{\infty}D_n P_n(\cos\theta)$$

同样对比系数得到

$$D_0=\frac{1}{3} \quad D_2=\frac{2}{3}$$

得到解

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3r}P_0(\cos\theta)+\frac{2}{3r^3}P_2(\cos\theta)$$

> 3.
>
> $$\begin{cases}\Delta_3 u=0, & 1<r<2\\ u|_{r=1}=\cos\theta, & \\ u|_{r=2}=1+\cos^2\theta & \end{cases}$$

通解

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(C_nr^n+D_nr^{-n-1})P_n(\cos\theta)$$

首先尝试组合得到边界条件

$$\begin{cases}\cos\theta=P_1(\cos\theta)\\1+\cos^2\theta=\frac{4}{3}P_0(\cos\theta)+\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)\end{cases}$$

带入边界条件

$$\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}(C_n+D_n)P_n(\cos\theta)=\cos\theta=P_1(\cos\theta)\\\sum_{n=0}^{\infty}(C_n2^n+D_n2^{-n-1})P_n(\cos\theta)=1+\cos^2\theta=\frac{4}{3}P_0(\cos\theta)+\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)\end{cases}$$

得到系数

$$\begin{cases}C_0+D_0=0\\C_0+\frac{1}{2}D_0=\frac{4}{3}\end{cases}\quad\begin{cases}C_1+D_1=1\\2C_1+\frac{1}{4}D_1=0\end{cases}\quad\begin{cases}C_2+D_2=0\\4C_2+\frac{1}{8}D_2=\frac{2}{3}\end{cases}$$

其余为0. 解得

$$\begin{cases}C_0=\frac{8}{3}\\D_0=-\frac{8}{3}\end{cases}\quad\begin{cases}C_1=-\frac{1}{7}\\D_1=\frac{8}{7}\end{cases}\quad\begin{cases}C_2=\frac{16}{93}\\D_2=-\frac{16}{93}\end{cases}$$

得到结果

$$u(r,\theta)=\frac{8}{3}-\frac{8}{3r}-\left(\frac{r}{7}-\frac{8}{7r^2}\right)P_1(\cos\theta)+\left(\frac{16}{93}r^2-\frac{16}{93r^3}\right)P_2(\cos\theta)$$

7.

> 半径为a的金属球壳, 用绝缘材料分成上下两个半球壳仍组成一个金属球壳, 经充电后, 上下半球壳的电位分别为u_1和u_2, 计算球壳内部电位分布

列出方程

$$\begin{cases}\Delta_3u=0, & r<a\\u(a,\theta)=\begin{cases}u_1 & 0<\theta<\frac{\pi}{2}\\u_2 & \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\end{cases}\end{cases}$$

球内通解

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nr^nP_n(\cos\theta)$$

带入边界条件

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_na^nP_n(\cos\theta)=\begin{cases}u_1 & 0<\theta<\frac{\pi}{2}\\u_2 & \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\end{cases}$$

求系数

$$C_n = \frac{2n+1}{2a^n}\left(-\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1 P_n(\cos\theta) d\cos\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u_2 P_n(\cos\theta) d\cos\theta\right)$$
$$= \frac{2n+1}{2a^n}\left(\int_0^1 u_1 P_n(x)dx + \int_{-1}^0 u_2 P_n(x)dx\right)$$
$$= \frac{(2n+1)(u_1+(-1)^n u_2)}{2a^n}\int_0^1 P_n(x)dx$$

利用

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \frac{1}{2} & n=1 \\ 0 & n=2k \\ \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!} & n=2k+1 \end{cases}$$

得到

$$C_n = \begin{cases} \frac{u_1+u_2}{2} & n=0 \\ \frac{3(u_1-u_2)}{4a} & n=1 \\ 0 & n=2k \\ \frac{(u_1-u_2)(4k+3)}{2a^{2k+1}}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!} & n=2k+1 \end{cases}$$

得到结果

$$u(r,\theta) = \frac{u_1+u_2}{2} + \frac{3}{4}(u_1-u_2)\left(\frac{r}{a}\right)P_1(\cos\theta)$$
$$+\frac{u_1-u_2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n+3)(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta)$$

8.

> 半径为a, 表面黑色的均质球体, 在温度为0的空气中受阳光照射, 阳光的热流强度为q, 求此球体内的稳定温度分布

列出方程

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad r<a \\ \left(\frac{\partial u}{\partial r}+Hu\right)|_{r=a} = f(\theta) = \begin{cases} q\cos\theta & 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi \end{cases} \end{cases}$$

球内通解

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta)$$

带入边界条件

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n a^{n-1}(n+Ha)P_n(\cos\theta) = f(\theta)$$

将$f(\theta)$展开, 利用5(1)的结果

$$f(\theta) = \frac{1}{4}P_0(\cos\theta) + \frac{1}{2}P_1(\cos\theta) + \frac{5}{16}P_2(\cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n+2)!!}\frac{4n+1}{2}P_{2n}(\cos\theta)$$

比对系数, 即可得到结果. 不详写了.

9.

> 一个半径为R, 厚度为$\frac{R}{2}$的半空心球, 外球面和内球面上的温度始终保持为
>
> $$f(\theta)=A\sin^2\frac{\theta}{2},\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$
>
> 底面温度保持为$\frac{A}{2}$, 求半空心球内部个点的定常温度.

列出方程

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0, & \frac{R}{2}\le r\le R, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\\ u|_{r=\frac{R}{2}}=u|_{r=R}=A\sin^2\frac{\theta}{2} \\ u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{A}{2}\end{cases}$$

通解为

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(C_nr^n+D_nr^{-n-1})P_n(\cos\theta)$$

将边界条件展开

$$A\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{A}{2}(1-\cos\theta)=\frac{A}{2}P_0(\cos\theta)-\frac{A}{2}P_1(\cos\theta)$$

带入边界条件, 得到

$$\begin{cases}C_0+\frac{2}{R}D_0=C_0+\frac{1}{R}D_0=\frac{A}{2}\\ \frac{R}{2}C_1+\frac{4}{R^2}D_1=RC_1+\frac{1}{R^2}D_1=-\frac{A}{2}\\ C_0+D_0\frac{1}{r}=\frac{A}{2}\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}C_0=\frac{A}{2} & D_0=0\\ C_1=-\frac{3A}{7R} & D_1=-\frac{AR^2}{14}\end{cases}$$

得到结果

$$u(r,\theta)=\frac{A}{2}-\left(\frac{3r}{7R}+\frac{R^2}{14r^2}\right)A\cos\theta$$