8.

> 长为l的水平静止均匀细弦, 一端($x=0$)固定, 另一端在平衡位置附近以$\cos t+\cos 2t$做简谐横振动, 求此弦的运动规律

列出方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(t,0)=0, u(t,l)=\cos t+\cos 2t \\ u(0,x)=0, u_t(0,x)=0 \end{cases}$$

需要将边界条件齐次化, 考虑满足方程的解

$$u=C\cos\omega t\sin\frac{\omega}{a}x$$

可以构造出特解

$$v=\frac{\sin\frac{x}{a}}{\sin\frac{l}{a}}\cos t+\frac{\sin\frac{2x}{a}}{\sin\frac{2l}{a}}\cos 2t$$

令$u=w+v$, 则w满足

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx} \\ w(t,0)=0, w(t,l)=0 \\ w(0,x)=-\frac{\sin\frac{x}{a}}{\sin\frac{l}{a}}-\frac{\sin\frac{2x}{a}}{\sin\frac{2l}{a}}, w_t(0,x)=0 \end{cases}$$

令$w(t,x)=X(x)T(t)$, 固有值问题不多赘述, 解得

$$X(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x \quad T(t)=A_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+B_n\cos\frac{n\pi a}{l}t \quad n\neq 0$$

得到通解

$$w(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+B_n\cos\frac{n\pi a}{l}t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

带入初值条件

$$\begin{cases} w(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=-\frac{\sin\frac{x}{a}}{\sin\frac{l}{a}}-\frac{\sin\frac{2x}{a}}{\sin\frac{2l}{a}} \\ w_t(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{l}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_n=0 \\ B_n=2a^2\pi\left[\frac{(-1)^n n}{(n\pi a)^2-l^2}+\frac{(-1)^n n}{(n\pi a)^2-4l^2}\right] \end{cases}$$

得到解

$$u=2a^2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n n}{(n\pi a)^2-l^2}+\frac{(-1)^n n}{(n\pi a)^2-4l^2}\right]\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x+\frac{\sin\frac{x}{a}}{\sin\frac{l}{a}}\cos t+\frac{\sin\frac{2x}{a}}{\sin\frac{2l}{a}}\cos 2t$$

12. 解下列定解问题

> (1)

> $$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + Ae^{-\alpha x}, t > 0, 0 < x < l \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \\ u(0,x) = T_0. \end{cases}$$

利用冲量原理解决, 先将方程拆分为齐次方程非0初值条件和非齐次方程0初值条件

$$\begin{cases} u_{1t} = a^2 u_{1xx}, \\ u_1(t,0) = u_1(t,l) = 0, \\ u_1(0,x) = T_0. \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{2t} = a^2 u_{2xx} + Ae^{-\alpha x} \\ u_2(t,0) = u_2(t,l) = 0, \\ u_2(0,x) = 0. \end{cases}$$

将u_2用冲量原理计算

$$u_2 = \int_0^t w(t,x,\tau) d\tau$$
$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \\ w(t,0) = w(t,l) = 0, \\ w(\tau,x) = Ae^{-\alpha x}. \end{cases}$$

先解出u_1, 固有值问题不再赘述

$$u_1(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right] \sin\frac{n\pi}{l}x$$

根据初值解出

$$u_1(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2T_0 \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right] \sin\frac{n\pi}{l}x$$

同样解得

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right] \sin\frac{n\pi}{l}x$$

带入条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \tau\right] \sin\frac{n\pi}{l}x = Ae^{-\alpha x}$$

则

$$\begin{aligned} B_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \tau\right] &= \frac{2}{l}\int_0^l Ae^{-\alpha x} \sin\frac{n\pi}{l}x dx \\ &= \frac{2A}{l^2} \frac{1-(-1)^n e^{-\alpha l}}{\alpha^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} \end{aligned}$$

得到

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi A}{l^2} \frac{1-(-1)^n e^{-\alpha l}}{\alpha^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

积分得到

$$u_2(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi a^2} \frac{1-(-1)^n e^{-\alpha l}}{\alpha^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} \left(1 - e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\right) \sin\frac{n\pi}{l}x$$

得到解

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= u_1(t,x)+u_2(t,x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[2T_0\frac{1-(-1)^n}{n\pi}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}+\frac{2A}{n\pi a^2}\frac{1-(-1)^n e^{-\alpha l}}{\alpha^2+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}\left(1-e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\right)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x
\end{aligned}
$$

> (2)
>
> $$
> \begin{cases}
> u_{tt}=a^2u_{xx}+A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t \quad t>0,0<x<l \\
> u_x(t,0)=u_x(t,l)=0 \\
> u(0,x)=0, u_t(0,x)=0
> \end{cases}
> $$

用固有函数法, 固有函数为

$$
u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x
$$

带回原方程, 得到

$$
f_1''(t)=-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 f_1(t)+A\sin\omega t
$$
$$
f_1(0)=0, f_1'(0)=0
$$

方程特解为

$$
f_1(t)=\frac{A}{\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2-w^2}\sin\omega t
$$

齐次通解为

$$
f_1(t)=C\sin(\frac{\pi a}{l}t)+D\cos(\frac{\pi a}{l}t)
$$

带入定解条件, 得到

$$
\begin{cases}
D=0 \\
C=\frac{l}{\pi a}\frac{\omega A}{\omega^2-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}
\end{cases}
$$

则

$$
f_1(t)=\frac{l}{\pi a}\frac{\omega A}{\omega^2-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\sin(\frac{\pi a}{l}t)+\frac{A}{\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2-w^2}\sin\omega t
$$

得到解为

$$
u(t,x)=\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\left(\omega\sin\frac{\pi a}{l}t-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi}{l}x
$$

13. 解下列定解问题

> (1)
>
> $$
> \begin{cases}
> u_{tt}=a^2u_{xx} \quad t>0,0<x<1 \\
> u_x(t,0)=1, \quad u(t,1)=0 \\
> u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=0
> \end{cases}
> $$

取特解$v=x-1$使得边界条件齐次化, 令$u=w+v$, 此时w满足

$$
\begin{cases}
w_{tt}=a^2w_{xx} \\
w_x(t,0)=0, \quad w(t,1)=0 \\
w(0,x)=1-x, \quad w_t(0,x)=0
\end{cases}
$$

固有值问题不多赘述, 得到

$$w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(n+\frac{1}{2})\pi x\cos(n+\frac{1}{2})\pi at$$

得到系数

$$A_n=2\int_0^1(1-x)\cos(n+\frac{1}{2})\pi xdx=\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}$$

得到解

$$u(t,x)=x-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(n+\frac{1}{2})\pi x\cos(n+\frac{1}{2})\pi at$$

> (2)
>
> $$\begin{cases}\Delta_2 u=f(x,y), & 0<x<a,0<y<b\\ u(0,y)=\varphi_1(y), & u(a,y)=\varphi_2(y)\\ u(x,0)=\psi_1(x), & u(x,b)=\psi_2(y)\end{cases}$$

设$v(x,y)=A(y)x+B(y)$, 使其满足边界条件

$$\begin{cases}B(y)=\varphi_1(y)\\ A(y)a+B(y)=\varphi_2(y)\end{cases}$$

得到

$$\begin{cases}B(y)=\varphi_1(y)\\ A(y)=\frac{1}{a}[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]\end{cases}$$

从而

$$v(x,y)=\frac{1}{a}[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]\,x+\varphi_1(y)$$

将该函数从u中减去, 之后采用固有值函数法, 详见答案.

1.

Simple and naive, 见答案