第五次作业

Zstar

1.(3)

首先可得，$\lambda=\omega^2>0$, $y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$, $y'=-\omega A\sin\omega x+\omega B\cos\omega x$.

再利用所给条件：

$$\omega B-kA=0$$
$$-\omega A\sin\omega l+\omega B\cos\omega l+hA\cos\omega l+hB\sin\omega l=0$$

$\Longrightarrow$

$$\cot\omega l=\frac{\omega A-hB}{\omega B+hA}=\frac{\omega^2/k-h}{\omega+\omega h/k}=\frac{\omega^2-hk}{(h+k)\omega}=\frac{1}{h+k}(\omega-\frac{hk}{\omega})$$

即固有值λ_n是方程：

$$\cot\sqrt{\lambda}l=\frac{1}{h+k}(\sqrt{\lambda}-\frac{hk}{\sqrt{\lambda}})$$

的第n个正根,n=1,2,3.......; $y_n(x)=\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x+k\sin\sqrt{\lambda_n}x$.

2.(1),(3)

(1).

二阶常系数微分方程，其特征方程的解为：$t_{1,2}=a\pm i\sqrt{\lambda-a^2}$, 方程解为：$y=Ae^{t_1x}+Be^{t_2x}$

$$y(0)=A+B=0, y(1)=Ae^{t_1}+Be^{t_2}=0$$
$$\text{即 } e^{t_1}=e^{t_2}\Longrightarrow e^{2i\sqrt{\lambda-a^2}}=1\Longrightarrow\lambda_n=a^2+(n\pi)^2, n=1,2,3,\ldots.$$

$y_n(x)=e^{ax}\sin n\pi x$

(3).

特征方程为：$k^4-\lambda=0$,设$\lambda=\omega_n^4$, 有四个解:$k_1=\omega_n, k_2=i\omega_n, k_3=-\omega_n, k_4=-i\omega_n$

故y可能的解的形式为:

$$y=(Ae^{\omega_nx}+Be^{-\omega_nx})+(C\cos\omega_nx+D\sin\omega_nx)$$

代入所给条件依次得：

$$A+B+C=0$$
$$Ae^{\omega_nl}+Be^{-\omega_nl}+C\cos\omega_nl+D\sin\omega_nl=0$$
$$A+B-C=0$$
$$Ae^{\omega_nl}+Be^{-\omega_nl}-C\cos\omega_nl-D\sin\omega_nl=0$$

则有:$A=B=C=0, \omega_n=\frac{n\pi}{l}\Longrightarrow y_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$

4.

利用分离变量法设 $u(x,t)=T(t)X(x)$, 带入方程可得 $T'(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$, 所以

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

和

$$\begin{cases} X''+\lambda X(x)=0, \quad 0<x<l \\ X(0)=0, \quad X'(l)+\gamma X(l)=0 \end{cases}$$

方程 (0.10) 是 $S-L$ 型方程。对应 $q(x)=0, k(x)=\rho(x)=1$ 。而且具有一三类边界条件，那么0不是其固有 值。 设 $\lambda=\omega^2, \omega>0$。 那么有

$$X''+\omega^2X(x)=0$$

上面方程的通解为

$$X(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$$

利用边界条件 $X(0)=0$ 可得 $A=0$, 所以 $X(x)=B\sin\omega x$ 。利用边界条件 $X'(l)+\gamma X(l)=0$ 可得

$$\omega B\cos\omega l+\gamma B\sin\omega l=0$$

所以

$$\tan\omega l=-\frac{\omega}{\gamma}$$

我们可以画出tan ωl 和 $-\frac{\omega}{\gamma}$ 的图像可知 (0.8) 会存在无穷多个正解， $0<\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_n<\cdots$ 。所 以我们得到对应的固有值为 $\lambda_n=\omega_n^2$ 和固有函数为 $X_n(x)=\sin\omega_n x$。其中 $\{\sin\omega_n x, n\in\mathbb{N}_+\}$ 是 $L^2[0,l]=$
$\left\{f(x)\,\middle|\,\int_0^l\left|f(x)\right|^2dx<+\infty\right\}$ 的正交基。对应的内积定义为: $(f(x),g(x))=\int_0^l f(x)\overline{g(x)}dx$。
另外利用 $T'(t)+a^2\omega_n^2T(t)=0$, 可知

$$T(t)=C_ne^{-a^2\omega_n^2t}$$

现在设

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-a^2\omega_n^2}\sin\omega_n x$$

利用边界条件 $u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\omega_n x=\varphi(x)$, 可得 $C_n=\frac{\langle\varphi(x),\sin\omega_n x\rangle}{\langle\sin\omega_n x,\sin\omega_n x\rangle}$. 计算得:

$$C_n=\frac{2}{l+\frac{\gamma}{\gamma^2+\omega_n^2}}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\omega_n\xi d\xi$$

这里有些符号和答案不一致，后面答案也已经给的很详细了

5.

列出来定解问题求解即可，方法与前述类似，具体可参考答案

9.(2),(3)

(2).先分离变量:

X的方程为:

$$\begin{cases} x^2X''(x)+3xX'(x)-2X(x)=-\lambda X(x) \\ X(1)=X(e)=0 \end{cases}$$

化成S-L型为：$[x^3X'(x)]'-2xX(x)+\lambda xX(x)=0$,由此可确定：$k(x),q(x),\rho(x)$

下一步是要求解X(x)的方程,注意到这是一个Euler方程, 做变换$x=e^t$可化为：

$$\frac{d^2X}{dt^2}+2\frac{dX}{dt}+(\lambda-2)X=0$$

到此处已经可以求解，但是为了方便，我们再做一步变换来消除一次项，令$X(t)=e^{\mu t}W(t)$代入得：

$$W''(t)+[2\mu+2]W'(t)+[\mu^2+2\mu+(\lambda—2)]W(t)=0$$

令$\mu=-1$,将方程化为：

$$\begin{cases}W''(t)+(\lambda-3)W(t)=0\\W(0)=W(1)=0\end{cases}$$

易求解：固有值:$\lambda_n=(n\pi)^2+3,X_n(x)=\frac{\sin(n\pi\ln x)}{x}$

从而，

$$u(t,x)=\sum_n C_n e^{-\omega_n^2a^2t}\frac{\sin(n\pi\ln x)}{x}$$
$$u(0,x)=\sum_n C_n\frac{\sin(n\pi\ln x)}{x}=\frac{1}{x}[\sin\pi\ln x-\sin 2\pi\ln x]$$
$$\Longrightarrow C_1=C_2=1,C_n=0(n>2)$$

最终解为：

$$u(t,x)=e^{-(3+\pi^2)t}\frac{1}{x}\sin\pi\ln x-e^{-(3+4\pi^2)t}\frac{1}{x}\sin 2\pi\ln x$$

Emm...所以这个题不写成S-L也没关系，因为初始条件给的很好

(3).先分离变量

X的方程：

$$\begin{cases}a^2X''(x)+bX'(x)-X(x)+\lambda X(x)=0\\X(0)=X(l)=0\end{cases}$$

求解特征方程得：$t1,2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a^2(\lambda-1)}}{2a^2}$,这里会发现只有两个共轭复根才能满足边界条件，再代入边界条件即可得，

$$\frac{\sqrt{4a^2(\lambda-1)-b^2}}{2a^2}l=n\pi\Longrightarrow\lambda=(\frac{n\pi a}{l})^2+\frac{b^2}{4a^2}+1,X_n(x)=e^{-\frac{b}{2a^2}x}sin\frac{n\pi}{l}x$$

固有函数$X_n(x)$为$L^2_\rho[0,l]$空间中以$\rho(x)=\frac{1}{a^2}e^{\frac{b}{a^2}x}$为权函数的正交基

得到固有值，再求解T的方程得$T_n(t)=\sin\sqrt{\lambda_n}t$，组合可得：

$$u(t,x)=e^{-\frac{b}{2a^2}x}\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\sin\sqrt{\lambda_n}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$u_t(0,x)=e^{-\frac{b}{2a^2}x}\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\sqrt{\lambda_n}\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)$$

$$B_n=\frac{2}{\sqrt{(\frac{n\pi a}{l})^2+\frac{b^2}{4a^2}+1l}}\int_0^l e^{\frac{b}{2a^2}x\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx}$$

10.(2)

设 $u=u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$ 为满足上面方程的解，那么就可以得到

$$\frac{r(rR'(r))'}{R(r)}=\frac{-\Theta''(\theta)}{\Theta}=\lambda$$

所以可以得到下面的边值问题

$$\begin{cases}\Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0, & 0<\theta<\alpha<2\pi\\ \Theta|_{\theta=0}=0, & \Theta|_{\theta=\alpha}=0\end{cases}$$

和

$$r(rR'(r))'-\lambda R(r)=0,\quad a<r<b$$

我们知道该方程是 $S-L$ 型方程，对应 $q(\theta)=0,k(\theta)=\rho(\theta)=1$ 。而且具有第一类的边界条件，那么可知0不是其固有值。
设固有值 $\lambda=\omega^2,\omega>0$ 。那么可得 $\Theta''(\theta)+\omega^2\Theta(\theta)=0$ 对应的通解为:
$\Theta(\theta)=A\cos\omega\theta+B\sin\omega\theta$。利
用边界条件可得 $A=0$, 和 $\sin\omega\alpha=0$, 所以 $\omega=\frac{n\pi}{\alpha},n\in\mathbb{N}_+$。所以对应的固有值为 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$ 和固有函数
为$\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta$。
另外由R的方程, 可得 $r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda_nR(r)=0$ 。我们令 $r=e^t\Rightarrow t=\ln r$.利用链式法则可知原方程
等价于

$$R''(t)-\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2R(t)=0$$

上面方程对应的通解为 $R_n=C_ne^{\frac{n\pi}{\alpha}t}+D_ne^{-\frac{n\pi}{\alpha}t}=C_nr^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_nr^{-\frac{n\pi}{\alpha}}$。 那么便可以得到

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_nr^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_nr^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta$$

利用边界条件 $u|_{r=a}=0,\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=b}=\sin^2\theta$ 可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_na^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_na^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta=0$$

和

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi}{\alpha}\left(C_nb^{\frac{n\pi-\alpha}{\alpha}}-D_nb^{-\frac{n\pi+\alpha}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta=\sin^2\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta$$

即:

$$C_na^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_na^{-\frac{n\pi}{\alpha}}=\frac{\left\langle 0,\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right\rangle}{\left\langle\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta,\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right\rangle}=0$$

$$\frac{n\pi}{\alpha}\left(C_n b^{\frac{n\pi-\alpha}{\alpha}}-D_n b^{-\frac{n\pi+\alpha}{\alpha}}\right)=\frac{\left\langle\sin^2\theta,\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right\rangle}{\left\langle\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta,\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right\rangle}$$

$$\begin{aligned}\left\langle\sin^2\theta,\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right\rangle&=\int_0^\alpha\sin^2\theta\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta d\theta\\&=\int_0^\alpha\left(\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right)d\theta\\&=\frac{\alpha}{2n\pi}(1-\cos n\pi)-\frac{1}{4}\int_0^\alpha\left[\sin\left(2+\frac{n\pi}{\alpha}\right)\theta-\sin\left(2-\frac{n\pi}{\alpha}\right)\right]d\theta\\&=\frac{\alpha}{2n\pi}[1-(-1)^n]-\frac{n\pi\alpha}{2\left(4\alpha^2-n^2\pi^2\right)}[(-1)^n\cos 2\alpha-1]\end{aligned}$$

令 $E_n=\frac{\alpha}{2n\pi}[1-(-1)^n]-\frac{n\pi\alpha}{2(4\alpha^2-n^2\pi^2)}[(-1)^n\cos 2\alpha-1]$.联立前式解得

$$C_n=\frac{E_n}{a^{\frac{2n\pi}{\alpha}}b^{-\frac{n\pi+\alpha}{\alpha}}+b^{\frac{n\pi-\alpha}{\alpha}}}$$

和

$$D_n=\frac{-E_n}{a^{-\frac{2n\pi}{\alpha}}b^{\frac{n\pi-\alpha}{\alpha}}+b^{-\frac{n\pi+\alpha}{\alpha}}}.$$