3.

> 长为l的均匀弦, 两端点固定, 在距离一段$(x=0)b$处拨离平衡位置h后放开, 求此弦的微小横振动.

列出方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \quad t>0,0<x<l \\ u(t,0)=u(t,l)=0 \\ u(0,x)=\begin{cases} \frac{h}{b}x & x<b \\ \frac{h}{b-l}(x-l) & x>b \end{cases} \quad u_t(0,x)=0 \end{cases}$$

令$u=X(x)T(t)$, 分离变量

$$\frac{X''}{X}=\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=-\lambda$$

得到方程

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ T''+a^2\lambda T=0 \end{cases}$$

由边界条件得到固有值问题

$$X(0)=X(l)=0$$

由S-L定理, λ非负. 设$\lambda=\omega^2$, 解出通解为

$$X=A\sin\omega x+B\cos\omega x$$

带入固有值问题

$$\begin{cases} X(0)=0\Rightarrow B=0 \\ X(l)=0\Rightarrow A\sin\omega l+B\cos\omega l=0 \end{cases}$$

得到

$$\begin{aligned} \sin\omega l&=0 \\ \omega l&=n\pi \qquad & n=0,1,2,\dots \\ \omega&=\frac{n\pi}{l} \qquad & n=0,1,2,\dots \end{aligned}$$

解出

$$X_n=\sin\frac{n\pi}{l}x \quad \lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2} \quad n=1,2,\dots$$

注意$n=0$时得到零解, 舍去. 将λ带入解出T,

$$T_n=C_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+D_n\cos\frac{n\pi a}{l}t$$

得到通解为

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+D_n\cos\frac{n\pi a}{l}t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

带入初值条件得到

$$u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=0\Rightarrow C_n=0$$

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\begin{cases}\frac{h}{b}x & 0<x\le b\\ \frac{h}{b-l}(x-l) & b<x\le l\end{cases}$$

则D_n为

$$D_n\int_0^l\sin^2\frac{n\pi}{l}xdx=\int_0^b\frac{h}{b}x\sin\frac{n\pi}{l}xdx+\int_b^l\frac{h}{b-l}(x-l)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$D_n=\frac{2hl^2\sin\frac{n\pi}{l}b}{b(l-b)\pi^2n^2}$$

得到解为

$$u(t,x)=\frac{2hl^2}{b(l-b)\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{l}b\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

6.

> 边长为l_1和l_2的矩形薄膜, 长为l_1的两边固定, 另两边自由, 求此薄膜的固有振动.

列出方程

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2\nabla^2u\quad t>0,0<x<l_1,0<y<l_2\\ u|_{y=0}=u|_{y=l_2}=0\\ u_x|_{x=0}=u_x|_{x=l_1}=0\end{cases}$$

分离变量$u=X(x)Y(y)T(t)$, 得到方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}\\ Y(0)=Y(l_2)=0\\ X'(0)=X'(l_1)=0\end{cases}$$

得到两个固有值问题

$$\begin{cases}X''+\omega^2X=0\\ X'(0)=X'(l_1)=0\end{cases}\qquad\begin{cases}Y''+\gamma^2Y=0\\ Y(0)=Y(l_2)=0\end{cases}$$

分别解得

$$X_n=\cos\frac{m\pi}{l_1}x\qquad\omega=\frac{m\pi}{l_1}\qquad m=0,1,2,\dots$$
$$Y_n=\sin\frac{n\pi}{l_2}y\qquad\gamma=\frac{n\pi}{l_2}\qquad n=1,2,\dots$$

得到T满足方程

$$T''+\left[(\frac{m}{l_1})^2+(\frac{n}{l_2})^2\right]a^2\pi^2T=0$$

解得

$$T_{mn}=C_{mn}\cos\sqrt{(\frac{m}{l_1})^2+(\frac{n}{l_2})^2}a\pi t+D_{mn}\sin\sqrt{(\frac{m}{l_1})^2+(\frac{n}{l_2})^2}a\pi t$$

得到解

$$u_{mn}(t,x,y)=\left[C_{mn}\cos\sqrt{(\frac{m}{l_1})^2+(\frac{n}{l_2})^2}a\pi t+D_{mn}\sin\sqrt{(\frac{m}{l_1})^2+(\frac{n}{l_2})^2}a\pi t\right]\cos\frac{m\pi}{l_1}x\sin\frac{n\pi}{l_2}y\quad n\neq0$$

7.

> 半径为a的无限长$(-\infty < z < +\infty)$的圆柱体内无自由电荷分布, 已知圆柱侧面电位如下, 求圆柱内部点位分布
>
> (1)$u|_{r=a} = A\cos\theta$; (2)$u|_{r=a} = A + B\sin\theta$; (3)$u|_{r=a} = \sin 2\theta\cos\theta$

列出方程, 注意方程与z无关

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 u = 0 \quad 0 < r < a \\ u|_{\theta=0} = u|_{\theta=2\pi} \end{cases}$$

分离变量, 得到

$$\begin{cases} \frac{rR' + r^2R''}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \end{cases}$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} \Theta'' + \omega^2\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \end{cases}$$

解得

$$\Theta(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta \quad \omega = n$$

得到R满足方程

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0$$

这是个欧拉方程, 用$t = \ln r$代换, 得到

$$\frac{d^2}{dt^2}R - n^2R = 0$$

注意讨论$n = 0$, 得到解

$$R = \begin{cases} C_n e^{nt} + D_n e^{-nt} = C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \quad n \neq 0 \\ C_0 t + D_0 = C_0\ln r + D_0 \end{cases}$$

已知$r \to 0$时电势不发散, 舍去发散部分, 得到通解

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)$$

分别带入边界条件, 得到解

(1)

$$u(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta) = A\cos\theta$$

比对系数, 得到

$$A_1 = \frac{A}{a} \quad \text{其余为}0$$

得到解

$$u(r,\theta) = A\frac{r}{a}\cos\theta$$

(2)

$$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)=A+B\sin\theta$$

比对系数, 得到

$$A_0=A\quad B_1=\frac{B}{a}$$

得到解

$$u(r,\theta)=A+B\frac{r}{a}\sin\theta$$

(3)

$$\begin{aligned}u(a,\theta)&=\sum_{n=0}^{\infty}a^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\\&=\sin 2\theta\cos\theta\\&=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 3\theta\end{aligned}$$

比对系数, 得到解

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}\frac{r}{a}\sin\theta+\frac{1}{2}\frac{r^3}{a^3}\sin 3\theta$$

9. 解下列定解问题

> (1)
>
> $$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx} & t>0,0<x<2l\\u_x(t,0)=u_x(t,2l)=0\\u(0,x)=\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2A} & |x-l|<A<l\\0 & \text{其余}x\end{cases}\end{cases}$$
>
> 求解$u(t,x)$, 并讨论当$t\to+\infty$时及$A\to 0$时解的极限

分离变量得到方程

$$\begin{cases}\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}\\X'(0)=X'(2l)=0\end{cases}$$

得到固有值问题

$$\begin{cases}X''+\omega^2X=0\\X'(0)=X'(2l)=0\end{cases}$$

解得

$$X_n=\cos\frac{m\pi}{2l}x\quad w=\frac{m\pi}{2l}\quad m=0,1,2,\dots$$

得到T满足方程

$$T'+\left(\frac{m\pi a}{2l}\right)^2T=0$$

注意讨论$m=0$. 解得

$$T_n=\exp\left[-(\frac{m\pi a}{2l})^2t\right]$$

得到通解

$$u(t,x)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\cos\frac{m\pi}{2l}x\exp\big[-(\frac{m\pi a}{2l})^2t\big]$$

带入初值条件

$$u(0,x)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\cos\frac{m\pi}{2l}x=\begin{cases}\frac{1}{2A} & l-A<x<l+A\\ 0 & 其余x\end{cases}$$

注意讨论$m=0$, 得到系数

$$C_m\int_0^{2l}\cos^2\frac{m\pi}{2l}xdx=\int_{l-A}^{l+A}\frac{1}{2A}\cos\frac{m\pi}{2l}xdx$$

$$C_m=\begin{cases}\frac{2}{m\pi A}\cos(\frac{m\pi}{2})\sin(\frac{m\pi A}{2l}) & n\neq 0\\ \frac{1}{2l} & n=0\end{cases}$$

得到通解

$$u(t,x)=\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2l}{m\pi A}\cos(\frac{m\pi}{2})\sin(\frac{m\pi A}{2l})\exp\big[-(\frac{m\pi a}{2l})^2t\big]\cos\frac{m\pi}{2l}x$$

注意m为奇数时, $\cos(\frac{m\pi}{2})$为0, 设$n=2m$, 得到解

$$u(t,x)=\frac{1}{2l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi A}(-1)^n\sin(\frac{n\pi A}{l})\exp\big[-(\frac{n\pi a}{l})^2t\big]\cos\frac{n\pi}{l}x$$

取极限, 得到

$$\lim_{t\to\infty}u(t,x)=\frac{1}{2l}\qquad\lim_{A\to\infty}u(t,x)=\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\big[-(\frac{n\pi a}{l})^2t\big]\cos\frac{n\pi}{l}x$$

> (3)
>
> $$\begin{cases}u_{tt}+2hu_t=a^2u_{xx} & t>0,0<x<l,h为常数,0<h<\frac{\pi a}{l}\\ u(t,0)=u(t,l)=0\\ u(0,x)=\varphi(x)\quad u_t(0,x)=\psi(x)\end{cases}$$

分离变量得到方程

$$\begin{cases}\frac{T''+2hT'}{T}=a^2\frac{X''}{X}\\ X(0)=X(l)=0\end{cases}$$

得到固有值问题

$$\begin{cases}X''+\gamma^2X=0\\ X(0)=X(l)=0\end{cases}$$

解得

$$X_n=\sin\frac{n\pi}{l}x\quad\gamma=\frac{n\pi}{l}\quad n=1,2,\dots$$

得到T满足方程

$$T''+2hT'+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T=0$$

令$T=e^{\lambda t}$, 得到

$$\lambda^2+2h\lambda+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2=0$$

解得

$$\lambda=-h\pm i\sqrt{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2-h^2}$$

记$\omega_n=\sqrt{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2-h^2}$, 得到

$$T=e^{-ht}(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t)$$

得到通解

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-ht}(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

得到系数为

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\quad b_n=\frac{a_n}{\omega_n}h+\frac{2}{l\omega_n}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

10. 解下列边值问题

> (1)
>
> $$\begin{cases}\Delta_2 u=1\quad 1<r<2\\ u|_{r=1}=\frac{5}{4}+\cos^2\theta\\ u|_{r=2}=1+\sin^2\theta\end{cases}$$

极坐标下方程为

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u)+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 u=1$$

选取特解$v=\frac{1}{4}r^2$, 令$u=w+v$, 则w满足

$$\begin{cases}\Delta_2 w=0\quad 1<r<2\\ w|_{r=1}=1+\cos^2\theta\\ w|_{r=2}=\sin^2\theta\end{cases}$$

和第七题相同, 通解为

$$w=C_0\ln r+D_0+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n r^n+\frac{D_n}{r^n})(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

带入边界条件

$$w|_{r=1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta=D_0+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n+D_n)(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$
$$w|_{r=2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta=C_0\ln 2+D_0+\sum_{n=1}^{\infty}(2^nC_n+\frac{D_n}{2^n})(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

比对系数, 得到

$$D_0=\frac{3}{2}\quad C_0=-\frac{1}{\ln 2}$$

$$\begin{cases} A_2(C_2+D_2)=\frac{1}{2} \\ A_2(4C_2+\frac{D_2}{4})=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2C_2=-\frac{1}{6} \\ A_2D_2=\frac{2}{3} \end{cases}$$

得到解

$$w=\frac{3}{2}-\frac{\ln r}{\ln 2}-\frac{1}{6}\left(r^2-\frac{4}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

加上特解, 得到

$$u(r,\theta)=w=\frac{3}{2}-\frac{\ln r}{\ln 2}-\frac{1}{6}\left(r^2-\frac{4}{r^2}\right)\cos 2\theta+\frac{r^2}{4}$$