第三次作业

Zstar

11.

(1). 判别式： $\Delta=(xy)^2-x^2y^2$=0, 由特征方程得：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2}=\frac{y}{x}\Longrightarrow\frac{y}{x}=C$$

做变量代换，$\xi=\frac{y}{x},\eta=y$, 易验证在$xy\neq 0$时，$J\neq 0$.可将方程化为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$$

(2).判别式：$\Delta=-x^2y^2<0$, 由特征方程得：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm i\sqrt{x^2y^2}}{y^2}=\pm i\frac{x}{y}$$

由此解得两族复特征曲线：

$$y^2\pm ix^2=C$$

令$\xi=y^2,\eta=x^2$代入原方程，得到标准形：

$$\begin{aligned}u_x&=2xu_\eta\\u_{xx}&=2u_\eta+4\eta u_{\eta\eta}\\u_y&=2yu_\xi\\u_{yy}&=2u_\xi+4\xi u_{\xi\xi}\\\Longrightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}&+\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0\end{aligned}$$

这种问题的话直接用链式法则求导就行，想记书上公式也可以。

13.

(2).判别式：$\Delta=4>0$,由特征方程得两族特征曲线：

$$y-3x=C_1,y+x=C_2$$

令$\xi=y-3x,\eta=y+x$,方程化为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0\Longrightarrow u(\xi,\eta)=\int f(\eta)d\eta+g(\xi)$$

再利用给定条件，

$$u(x,0)=3x^2\Leftrightarrow u(-3x,x)=3x^2\Longrightarrow\int f(x)dx+g(-3x)=3x^2\Longrightarrow f(x)-3g'(-3x)=6x$$
$$u_y(x,0)=u_\xi(-3x,x)+u_\eta(-3x,x)=0\Longrightarrow f(x)+g'(-3x)=0$$

由此可得，

$$g'(x)=\frac{x}{2}\Longrightarrow g(x)=\frac{x^2}{4},f(x)=\frac{3x}{2}$$

注意这里x不是原方程里的x,只是为了表达g,f与其自变量的函数关系

最终求得，

$$u(\xi,\eta)=\frac{3}{4}\eta^2+\frac{1}{4}\xi^2,\text{也即：}u(x,y)=\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(3x-y)^2$$

(3).判别式：$\Delta=1>0$,得：

$$\xi=y-sinx-x,\eta=y-sinx+x$$

将方程化为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0\Longrightarrow u(\xi,\eta)=f(\eta)+g(\xi)$$

再做变量代换：$s=\frac{\eta+\xi}{2},t=\frac{\eta-\xi}{2}$,得到弦振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

再根据边界条件利用$d'Alembert$公式得：

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\phi(x-\sin x+y)+\phi(x+\sin x-y)]+\frac{1}{2}\int_{x+\sin x-y}^{x-\sin x+y}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

14.

(4). 先求v(x),满足：$v_{xx}+cosx=0$,易求得解为:$v=cosx$

再令$u=w+v(x)$,可将原方程化为：

$$\begin{cases}w_{xx}-w_{yy}=0,y>0,-\infty<x<\infty\\w(x,0)=-v(x)=-cosx,w_y(x,0)=4x\end{cases}$$

利用$d'Alement$公式得：

$$w(x,y)=\frac{1}{2}(-cos(x+y)-cos(x-y))+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}4\xi d\xi=4xy-\cos x\cos y$$

最终得，

$$u=w+v=(1-\cos y)\cos x+4xy$$

(5). 设$u=\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$

代入边界条件定出x_0,y_0,z_0, 即可得，$u=\left[x^2+(y+2)^2+z^2\right]^{-\frac{1}{2}}$

(6). 直接积分得：

$$u(x,y)=\frac{1}{6}x^3y^2+f(x)+g(y),f(x),g(y)\text{为任意}C^1\text{函数}$$

再利用边界条件即可定出：

$$u(x,y)=\frac{1}{6}(x^3-1)y^2+x^2-1+\cos y$$

(7). 利用p44页第一个公式：

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{2}[\phi(x-at)+\phi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(-\tau)} f(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2}\left[(x-at)^2+(x+at)^2\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin(2\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} 2\tau\xi\mathrm{d}\xi \\
&= x^2+a^2t^2 - \frac{1}{4a}[\cos(2x+2at)-\cos(2x-2at)] + \frac{1}{2a}\int_0^t \tau\left[(x+a(t-\tau))^2-(x-a(t-\tau))^2\right] \\
&= x^2+a^2t^2 + \frac{1}{2a}\sin 2x\sin 2at + 2x\int_0^t \tau(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= x^2+a^2t^2 + \frac{1}{2a}\sin 2x\sin 2at + \frac{1}{3}xt^3
\end{aligned}
$$