第一次作业

Zstar

1.

(1). 设 f 是一次连续可微的任意函数，证明：$u=f(xy)$ 满足方程 $x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0$
(2). 设 $F(\xi),G(\xi)$ 是二次连续可微的任意函数，λ_1,λ_2 为常数，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 证明：$u=F(x+\lambda_1 y)+G(x+_2 y)$ 满足方程 $\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
(3). 证明：$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}(t>0)$ 满足方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 而且有 $\lim\limits_{t\to 0}u(t,x)=0(x\neq 0)$

(1).

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f'x,\quad x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

(2). 证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F''+G'',\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda_1^2F''+\lambda_2^2G'',\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\lambda_1F''+\lambda_2G''$$

带入直接验证即可.
(3). 分别对 t,x 求导验证就行，认识到这是一个高斯分布，两边极限趋于 0，第五章会说明这个 U 是热传导方程的基本解，有兴趣可以先看书上 p200 页.

2.

设 $r=\sqrt{x^2+y^2},\quad r\neq 0$
(1), $\Delta_2 u=0$, 求特解 $u=u(r)$.
(2) $\Delta_2 u+k^2u=0,k$ 为常数，求 $u=u(r)$ 所满足的常微分方程.

柱坐标 (r,θ,z) 下的 Laplace Operator 表示为：

$$\Delta_3=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(1). u(r) 只和 r 有关，上式变为：

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=0$$

令 $t=\frac{du}{dr}$, 化为：

$$\frac{dt}{dr}+\frac{1}{r}t=0$$

一阶线性方程，得解：$t=\frac{C}{r}$, 再求一步得：$u(r)=C_1 lnr+C_2$
(2). 直接得：

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+k^2u=0$$

此方程为 0 阶 Bessel 方程，其通解 u(r) 将在第三章介绍.

3.

设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad r\neq 0$
(1) $\Delta_3 u=0$, 求特解 $u=u(r)$.
(2) $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\Delta_3 u=0$, 设 $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}R(r)$, 求 $R(r)$ 所满足的方程.

球坐标下的 Laplace Operator 表示为：

$$\Delta_3=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

(1). 化为：

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=0$$

与前类似，可得解：$u=\frac{c_1}{r}+c_2$
(2). 带入 u 将方程化为:

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\frac{\omega^2}{a^2}R=0$$

5.

长为 l 的均匀柔软细绳，上端 $x=0$ 固定，在其自身重力作用下处于垂直平衡位置，试推导此悬线受扰动后相对于平衡位置的微小横振动方程。

设线长为 l, 弦的线密度为 ρ, 那么在 $\frac{\partial u}{\partial x}<<1$ 时，则 x 处的张力 $T(x)$ 为:

$$T(x)\approx\rho g(l-x)$$

且 $T(x)$ 的方向总是沿着弦在 x 点处的切线方向，记 $u(x,t)$ 表示弦上各点在 t 时刻沿垂直与 x 轴方向的位移，取弦段 $(x,x+\Delta x)$, 那么弦段两端张力在 u 轴方向的投影分别为:

$$\rho g(l-x)\sin\theta(x),\quad \rho g(l-x-\Delta x)\sin\theta(x+\Delta x)$$

另外，

$$\sin\theta(x)\approx\tan\theta(x)=\frac{\partial u}{\partial x}$$

由此可以得到运动方程：

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2u}{\partial^2 t}=[l-x-\Delta x]\rho g\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}-[l-x]\rho g\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x$$

令 $\Delta x\to 0$, 得：

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\rho g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

6.

有一均匀弹性细杆，只要杆中任一段有横向位移或速度，必导致邻杆的压缩或者伸长，这种伸缩传开去，就会有纵波沿着杆传播，试推导杆的微小横振动方程

假设 AB 段运动导致邻段为拉，比如说 AB 段向右运动，那么 AB 段左侧就会拉伸，右侧就会压缩。在纵向速度 ν 作用一段时间 dt 后，运动到另外一个位置，$u(x,t)$ 为杆上各质点的位移函数。对 AB 段进行受力分析，AB 段左右段的拉力分别为 F_A, F_B 和本身的惯性力 F_0 ，三力的合力为零。

$$F_A = E\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}S$$

$$F_B = E\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x}S$$

$$F_0 = \rho S dx\frac{\partial \nu}{\partial t} = \rho S dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$F_0 = F_B - F_A$$

E 是杨氏模量，由此可得：

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

7,9,10

三个题都比较简单，这里就不赘述了，参考书上答案即可。