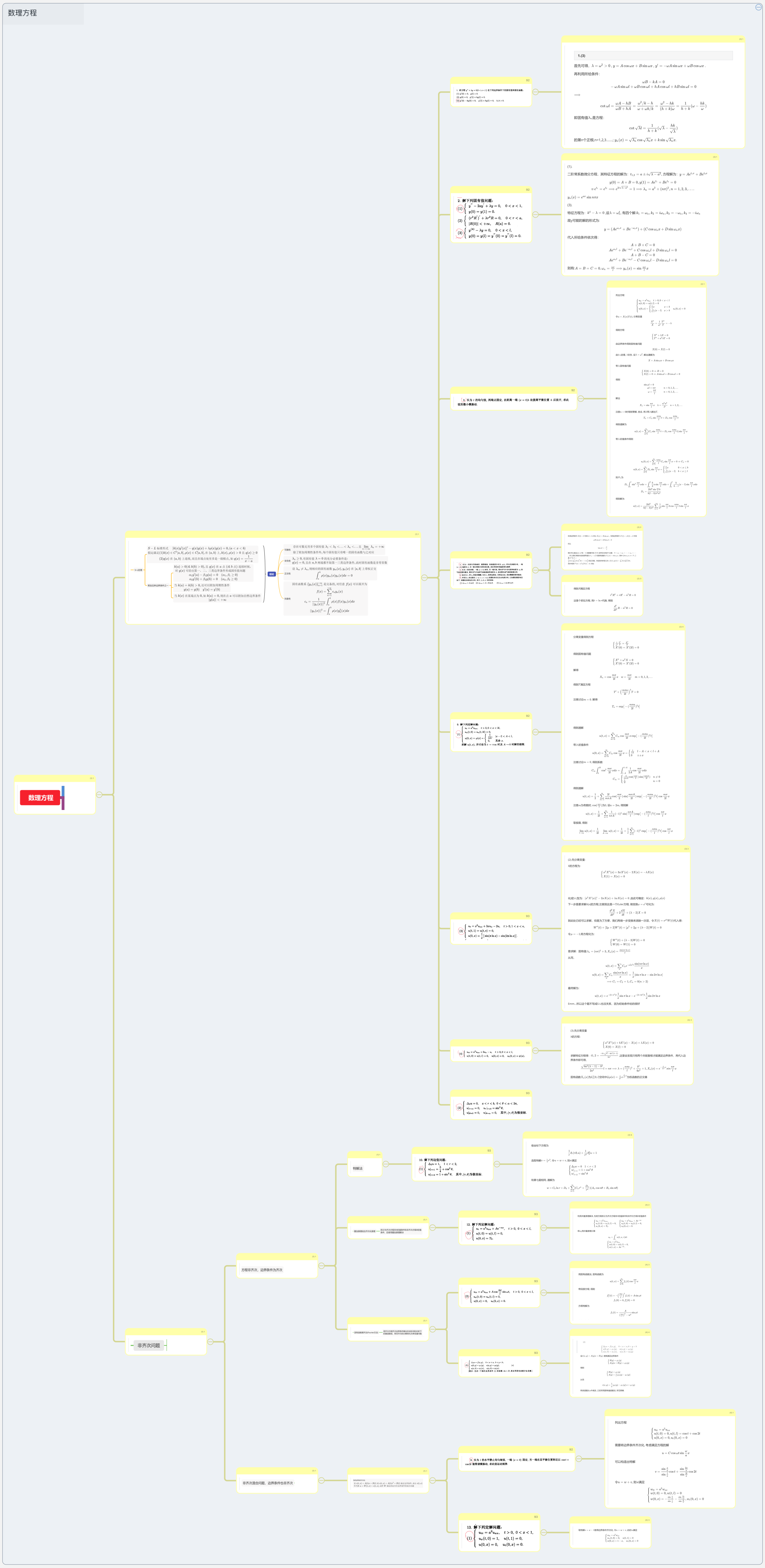
数理方程



数理方程

S-L定理

$S-L$ 标准形式 $[k(x)y'(x)]'-q(x)y(x)+\lambda\rho(x)y(x)=0,(a<x<b)$
假定满足(1)$k(x)\in C^1[a,b],\rho(x)\in C[a,b]$, 在 (a,b) 上, $k(x),\rho(x)>0$ 且 $q(x)\geq 0$
(2)$q(x)$ 在 (a,b) 上连续, 而且在端点处至多是一级极点, 如 $q(x)=\frac{1}{x-a}$

附加五种边界条件之一

$k(a)>0$(或 $k(b)>0$), 且 $q(x)$ 在 a 点 (或 b 点) 连续时候, 对 $y(x)$ 可给出第一、二、三类边界条件形成固有值问题
$$\alpha_1y'(a)-\beta_1y(a)=0\quad(\alpha_1,\beta_1\geq 0)$$
$$\alpha_2y'(b)+\beta_2y(b)=0\quad(\alpha_2,\beta_2\geq 0)$$

当 $k(a)=k(b)>0$, 还可以附加周期性条件
$$y(a)=y(b)\quad y'(a)=y'(b)$$

当 $k(x)$ 在某端点为 0, 如 $k(a)=0$, 则在点 a 可以附加自然边界条件
$$|y(a)|<+\infty$$

结论

可数性：存在可数无穷多个固有值 $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$ 且 $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$
除了附加周期性条件外, 每个固有值只有唯一的固有函数与之对应

非负性：$\lambda_n\geq 0$, 有固有值 $\lambda=0$ 的充分必要条件是:
$q(x)=0$, 且在 a,b 两端都不取第一三类边界条件, 此时固有函数是非零常数

正交性：设 $\lambda_m\neq\lambda_n$, 则相应的固有函数 $y_m(x),y_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上带权正交
$$\int_a^b\rho(x)y_m(x)y_n(x)dx=0$$

完备性：固有函数系 $\{y_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 是完备的, 对任意 $f(x)$ 可以展开为
$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_ny_n(x)$$
$$c_n=\frac{1}{||y_n(x)||^2}\int_a^b\rho(x)f(x)y_n(x)dx$$
$$||y_n(x)||^2=\int_a^b\rho(x)y_n^2(x)dx$$

92

1. 求方程 $y''+\lambda y=0\,(0<x<l)$ 在下列边界条件下的固有值和固有函数:
(1) $y'(0)=0,\quad y(l)=0$.
(2) $y(0)=0,\quad y'(l)+hy(l)=0$.
(3) $y'(0)-ky(0)=0,\quad y'(l)+hy(l)=0,\quad h,k>0$.

1.(3)

首先可得，$\lambda=\omega^2>0$, $y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$, $y'=-\omega A\sin\omega x+\omega B\cos\omega x$.

再利用所给条件:
$$\omega B-kA=0$$
$$-\omega A\sin\omega l+\omega B\cos\omega l+hA\cos\omega l+hB\sin\omega l=0$$

$\Longrightarrow$
$$\cot\omega l=\frac{\omega A-hB}{\omega B+hA}=\frac{\omega^2/k-h}{\omega+\omega h/k}=\frac{\omega^2-hk}{(h+k)\omega}=\frac{1}{h+k}(\omega-\frac{hk}{\omega})$$

即固有值λ_n是方程:
$$\cot\sqrt{\lambda}l=\frac{1}{h+k}(\sqrt{\lambda}-\frac{hk}{\sqrt{\lambda}})$$

的第n个正根,n=1,2,3.......; $y_n(x)=\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x+k\sin\sqrt{\lambda_n}x$.

92

2. 解下列固有值问题:

(1) $\begin{cases}y''-2ay'+\lambda y=0, & 0<x<1,\\ y(0)=y(1)=0.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}(r^2R')'+\lambda r^2R=0, & 0<r<a,\\ |R(0)|<+\infty, & R(a)=0.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}y^{(4)}-\lambda y=0, & 0<x<l,\\ y(0)=y(l)=y''(0)=y''(l)=0.\end{cases}$

(1).

二阶常系数微分方程，其特征方程的解为：$t_{1,2}=a\pm i\sqrt{\lambda-a^2}$, 方程解为：$y=Ae^{t_1x}+Be^{t_2x}$
$$y(0)=A+B=0,y(1)=Ae^{t_1}+Be^{t_2}=0$$
$$即\ e^{t_1}=e^{t_2}\Longrightarrow e^{2i\sqrt{\lambda-a^2}}=1\Longrightarrow\lambda_n=a^2+(n\pi)^2,n=1,2,3,\ldots.$$

$y_n(x)=e^{ax}\sin n\pi x$

(3).

特征方程为：$k^4-\lambda=0$,设$\lambda=\omega_n^4$, 有四个解:$k_1=\omega_n,k_2=i\omega_n,k_3=-\omega_n,k_4=-i\omega_n$

故y可能的解的形式为:
$$y=(Ae^{\omega_nx}+Be^{-\omega_nx})+(C\cos\omega_nx+D\sin\omega_nx)$$

代入所给条件依次得:
$$A+B+C=0$$
$$Ae^{\omega_nl}+Be^{-\omega_nl}+C\cos\omega_nl+D\sin\omega_nl=0$$
$$A+B-C=0$$
$$Ae^{\omega_nl}+Be^{-\omega_nl}-C\cos\omega_nl-D\sin\omega_nl=0$$

则有:$A=B=C=0,\omega_n=\frac{n\pi}{l}\Longrightarrow y_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$

92

3. 长为 l 的均匀弦, 两端点固定, 在距离一端 $(x=0)b$ 处拨离平衡位置 h 后放开, 求此弦的微小横振动.

列出方程
$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx} & t>0,0<x<l\\ u(t,0)=u(t,l)=0\\ u(0,x)=\begin{cases}\frac{h}{b}x & x<b\\ \frac{h}{b-l}(x-l) & x>b\end{cases} & u_t(0,x)=0\end{cases}$$

令$u=X(x)T(t)$, 分离变量
$$\frac{X''}{X}=\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=-\lambda$$

得到方程
$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ T''+a^2\lambda T=0\end{cases}$$

由边界条件得到固有值问题
$$X(0)=X(l)=0$$

由S-L定理, λ非负. 设$\lambda=\omega^2$, 解出通解为
$$X=A\sin\omega x+B\cos\omega x$$

带入固有值问题
$$\begin{cases}X(0)=0\Rightarrow B=0\\ X(l)=0\Rightarrow A\sin\omega l+B\cos\omega l=0\end{cases}$$

得到
$$\sin\omega l=0$$
$$\omega l=n\pi\qquad n=0,1,2,\ldots$$
$$\omega=\frac{n\pi}{l}\qquad n=0,1,2,\ldots$$

解出
$$X_n=\sin\frac{n\pi}{l}x\quad\lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\quad n=1,2,\ldots$$

注意$n=0$时得到零解, 舍去. 将λ带入解出T,
$$T_n=C_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+D_n\cos\frac{n\pi a}{l}t$$

得到通解为
$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+D_n\cos\frac{n\pi a}{l}t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

带入初值条件得到
$$u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=0\Rightarrow C_n=0$$
$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\begin{cases}\frac{h}{b}x & 0<x\leq b\\ \frac{h}{b-l}(x-l) & b<x\leq l\end{cases}$$

则D_n为
$$D_n\int_0^l\sin^2\frac{n\pi}{l}xdx=\int_0^b\frac{h}{b}x\sin\frac{n\pi}{l}xdx+\int_b^l\frac{h}{b-l}(x-l)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$
$$D_n=\frac{2hl^2\sin\frac{n\pi}{l}b}{b(l-b)\pi^2n^2}$$

得到解为
$$u(t,x)=\frac{2hl^2}{b(l-b)\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{l}b\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

92

4. 长为 l 的均匀导热细杆, 侧面绝热, 初始温度分布为 $\varphi(x)$, 杆内无热源分布, 一端 $(x=0)$ 温度为 0, 另一端与零度介质有热交换, 求此导热杆的温度变化规律.
5. 长为 l 的柱形管, 一端 $(x=0)$ 封闭, 另一端开放, 管内空气中含有某种浓度为 u_0 的气体向管外扩散, 管外空气中这种气体浓度始终保持为 0, 求此管内该气体的浓度分布.
6. 边长为 l_1 和 l_2 的矩形薄膜, 长为 l_1 的两边固定, 另两边自由, 求此薄膜的固有振动.
7. 半径为 a 的无限长 $(-\infty<z<+\infty)$ 的圆柱体内无自由电荷分布, 已知圆柱侧面电位如下, 求圆柱内部电位分布, 其中, (r,θ,z) 为柱坐标.
(1) $u|_{r=a}=A\cos\theta$; (2) $u|_{r=a}=A+B\sin\theta$; (3) $u|_{r=a}=\sin 2\theta\cos\theta$.

利用边界条件 $X(0)=0$ 可得 $A=0$, 所以 $X(x)=B\sin\omega x$，利用边界条件 $X'(l)+\gamma X(l)=0$ 可得
$$\omega B\cos\omega l+\gamma B\sin\omega l=0$$
所以
$$\tan\omega l=-\frac{\omega}{\gamma}$$
我们可以画出 $\tan\omega l$ 和 $-\frac{\omega}{\gamma}$ 的图像可知 (0.8) 会存在无穷多个正解，$0<\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_n<\cdots$，所以我们得到对应的固有值为 $\lambda_n=\omega_n^2$ 和固有函数为 $X_n(x)=\sin\omega_nx$，其中 $\{\sin\omega_nx,n\in N_+\}$ 是 $L^2[0,l]=\left\{f(x)\,|\int_0^l|f(x)|^2dx<+\infty\right\}$ 的正交基，对应的内积定义为: $(f(x),g(x))=\int_0^lf(x)\overline{g(x)}dx$。另外利用 $T'(t)+a^2\omega_n^2T(t)=0$, 可知

得到R满足方程
$$r^2R''+rR'-n^2R=0$$
这是个欧拉方程, 用$t=\ln r$代换, 得到
$$\frac{d^2}{dt^2}R-n^2R=0$$

92

9. 解下列定解问题:

(1) $\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, & t>0,0<x<2l,\\ u_x(t,0)=u_x(t,2l)=0,\\ u(0,x)=\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2A}, & |x-l|<A<l,\\ 0, & 其余\ x.\end{cases}\end{cases}$

求解 $u(t,x)$, 并讨论当 $t\to+\infty$ 时及 $A\to 0$ 时解的极限.

分离变量得到方程
$$\begin{cases}\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}\\ X'(0)=X'(2l)=0\end{cases}$$

得到固有值问题
$$\begin{cases}X''+\omega^2X=0\\ X'(0)=X'(2l)=0\end{cases}$$

解得
$$X_n=\cos\frac{m\pi}{2l}x\quad w=\frac{m\pi}{2l}\quad m=0,1,2,\ldots$$

得到T满足方程
$$T'+\left(\frac{m\pi a}{2l}\right)^2T=0$$

注意讨论$m=0$. 解得
$$T_n=\exp[-(\frac{m\pi a}{2l})^2t]$$

得到通解
$$u(t,x)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\cos\frac{m\pi}{2l}x\exp[-(\frac{m\pi a}{2l})^2t]$$

带入初值条件
$$u(0,x)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\cos\frac{m\pi}{2l}x=\begin{cases}\frac{1}{2A} & l-A<x<l+A\\ 0 & 其余\ x\end{cases}$$

注意讨论$m=0$, 得到系数
$$C_m\int_0^{2l}\cos^2\frac{m\pi}{2l}xdx=\int_{l-A}^{l+A}\frac{1}{2A}\cos\frac{m\pi}{2l}xdx$$
$$C_m=\begin{cases}\frac{2}{m\pi A}\cos(\frac{m\pi}{2})\sin(\frac{m\pi A}{2l}) & n\neq 0\\ \frac{1}{2l} & n=0\end{cases}$$

得到通解
$$u(t,x)=\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2l}{m\pi A}\cos(\frac{m\pi}{2})\sin(\frac{m\pi A}{2l})\exp[-(\frac{m\pi a}{2l})^2t]\cos\frac{m\pi}{2l}x$$

注意m为奇数时, $\cos(\frac{m\pi}{2})$为0, 设$n=2m$, 得到解
$$u(t,x)=\frac{1}{2l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi A}(-1)^n\sin(\frac{n\pi A}{l})\exp[-(\frac{n\pi a}{l})^2t]\cos\frac{n\pi}{l}x$$

取极限, 得到
$$\lim_{t\to\infty}u(t,x)=\frac{1}{2l}\quad\lim_{A\to\infty}u(t,x)=\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp[-(\frac{n\pi a}{l})^2t]\cos\frac{n\pi}{l}x$$

93

(2) $\begin{cases}u_t=x^2u_{xx}+3xu_x-2u, & t>0,1<x<e,\\ u(t,1)=u(t,e)=0,\\ u(0,x)=\frac{1}{x}[\sin(\pi\ln x)-\sin(2\pi\ln x)].\end{cases}$

(2).先分离变量:

X的方程为:
$$\begin{cases}x^2X''(x)+3xX'(x)-2X(x)=-\lambda X(x)\\ X(1)=X(e)=0\end{cases}$$

化成S-L型为：$[x^3X'(x)]'-2xX(x)+\lambda xX(x)=0$,由此可确定：$k(x),q(x),\rho(x)$

下一步是要求解X(x)的方程,注意到这是一个Euler方程, 做变换$x=e^t$可化为:
$$\frac{d^2X}{dt^2}+2\frac{dX}{dt}+(\lambda-2)X=0$$

到此处已经可以求解，但是为了方便，我们再做一步变换来消除一次项，令$X(t)=e^{\mu t}W(t)$代入得:
$$W''(t)+[2\mu+2]W'(t)+[\mu^2+2\mu+(\lambda-2)]W(t)=0$$

令$\mu=-1$,将方程化为:
$$\begin{cases}W''(t)+(\lambda-3)W(t)=0\\ W(0)=W(1)=0\end{cases}$$

易求解：固有值:$\lambda_n=(n\pi)^2+3,X_n(x)=\frac{\sin(n\pi\ln x)}{x}$

从而,
$$u(t,x)=\sum_nC_ne^{-\omega_n^2a^2t}\frac{\sin(n\pi\ln x)}{x}$$
$$u(0,x)=\sum_nC_n\frac{\sin(n\pi\ln x)}{x}=\frac{1}{x}[\sin\pi\ln x-\sin 2\pi\ln x]$$
$$\Longrightarrow C_1=C_2=1,C_n=0(n>2)$$

最终解为:
$$u(t,x)=e^{-(3+\pi^2)t}\frac{1}{x}\sin\pi\ln x-e^{-(3+4\pi^2)t}\frac{1}{x}\sin 2\pi\ln x$$

Emm...所以这个题不写成S-L也没关系，因为初始条件给的很好

93

(4) $\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+bu_x-u, & t>0,0<x<l,\\ u(t,0)=u(t,l)=0, & u(0,x)=0,\quad u_t(0,x)=\psi(x).\end{cases}$

(3).先分离变量

X的方程:
$$\begin{cases}a^2X''(x)+bX'(x)-X(x)+\lambda X(x)=0\\ X(0)=X(l)=0\end{cases}$$

求解特征方程得：$t1,2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a^2(\lambda-1)}}{2a^2}$,这里会发现只有两个共轭复根才能满足边界条件，再代入边界条件即可得,
$$\frac{\sqrt{4a^2(\lambda-1)-b^2}}{2a^2}l=n\pi\Longrightarrow\lambda=(\frac{n\pi a}{l})^2+\frac{b^2}{4a^2}+1,X_n(x)=e^{-\frac{b}{2a^2}x}sin\frac{n\pi}{l}x$$

固有函数$X_n(x)$为$L_\rho^2[0,l]$空间中以$\rho(x)=\frac{1}{a^2}e^{\frac{b}{a^2}x}$为权函数的正交基

93

(2) $\begin{cases}\Delta_2u=0, & a<r<b,\ 0<\theta<\alpha<2\pi,\\ u|_{r=a}=0, & u_r|_{r=b}=\sin^2\theta,\\ u|_{\theta=0}=0, & u|_{\theta=\alpha}=0,\quad 其中,(r,\theta)为极坐标.\end{cases}$

非齐次问题

方程非齐次，边界条件为齐次

特解法

93

10. 解下列边值问题:

(1) $\begin{cases}\Delta_2u=1, & 1<r<2,\\ u|_{r=1}=\frac{5}{4}+\cos^2\theta,\\ u|_{r=2}=1+\sin^2\theta, & 其中,(r,\theta)为极坐标.\end{cases}$

极坐标下方程为
$$\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_ru)+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2u=1$$

选取特解$v=\frac{1}{4}r^2$, 令$u=w+v$, 则w满足
$$\begin{cases}\Delta_2w=0 & 1<r<2\\ w|_{r=1}=1+\cos^2\theta\\ w|_{r=2}=\sin^2\theta\end{cases}$$

和第七题相同, 通解为
$$w=C_0\ln r+D_0+\sum_{n=1}^{\infty}(C_nr^n+\frac{D_n}{r^n})(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

叠加原理结合齐次化原理 — 拆分为齐次方程非0初值条件和非齐次方程0初值条件，后者用叠加原理解决

93

12. 解下列定解问题:

(1) $\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+Ae^{-\alpha x}, & t>0,\ 0<x<l,\\ u(t,0)=u(t,l)=0,\\ u(0,x)=T_0.\end{cases}$

利用冲量原理解决, 先将方程拆分为齐次方程非0初值条件和非齐次方程0初值条件
$$\begin{cases}u_{1t}=a^2u_{1xx},\\ u_1(t,0)=u_1(t,l)=0,\\ u_1(0,x)=T_0.\end{cases}\qquad\begin{cases}u_{2t}=a^2u_{2xx}+Ae^{-\alpha x}\\ u_2(t,0)=u_2(t,l)=0,\\ u_2(0,x)=0.\end{cases}$$

将u_2用冲量原理计算
$$u_2=\int_0^tw(t,x,\tau)d\tau$$
$$\begin{cases}w_t=a^2w_{xx}\\ w(t,0)=w(t,l)=0,\\ w(\tau,x)=Ae^{-\alpha x}.\end{cases}$$

固有函数展开法(Fourier方法) — 用齐次方程齐次边界条件解出在该区间和内积下的基函数组，将非齐次的分解转化为单变量问题

93

(2) $\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t, & t>0,\ 0<x<l,\\ u_x(t,0)=u_x(t,l)=0,\\ u(0,x)=0, & u_t(0,x)=0.\end{cases}$

用固有函数法, 固有函数为
$$u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

带回原方程, 得到
$$f_1''(t)=-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2f_1(t)+A\sin\omega t$$
$$f_1(0)=0,f_1'(0)=0$$

方程特解为
$$f_1(t)=\frac{A}{\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2-w^2}\sin\omega t$$

93

(2) $\begin{cases}\Delta_2u=f(x,y), & 0<x<a,\ 0<y<b,\\ u(0,y)=\varphi_1(y), & u(a,y)=\varphi_2(y), & (*)\\ u(x,0)=\psi_1(x), & u(x,b)=\psi_2(x).\end{cases}$

[提示: 先求一个满足边界条件 (*) 的函数 $Ax+B$, 然后用固有函数方法求解.]

(2)
$$\begin{cases}\Delta_2u=f(x,y), & 0<x<a,0<y<b\\ u(0,y)=\varphi_1(y), & u(a,y)=\varphi_2(y)\\ u(x,0)=\psi_1(x), & u(x,b)=\psi_2(y)\end{cases}$$

设$v(x,y)=A(y)x+B(y)$, 使其满足边界条件
$$\begin{cases}B(y)=\varphi_1(y)\\ A(y)a+B(y)=\varphi_2(y)\end{cases}$$

得到
$$\begin{cases}B(y)=\varphi_1(y)\\ A(y)=\frac{1}{a}[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]\end{cases}$$

从而
$$v(x,y)=\frac{1}{a}[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]x+\varphi_1(y)$$

将该函数从u中减去, 之后采用固有值函数法, 详见答案.

非齐次混合问题，边界条件也非齐次

先把边界条件齐次化
设 $v(t,x)=A(t)x+B(t)$ 或 $v(t,x)=A(t)x^2+B(t)$ 满足边界条件, 求出 $v(t,x)$ 作代换 $u=W(t,x)+v(t,x)$, 这样 W 满足的是齐次边界条件的混合问题

92

8. 长为 l 的水平静止均匀细弦, 一端 $(x=0)$ 固定, 另一端在其平衡位置附近以 $\cos t+\cos 2t$ 做简谐横振动, 求此弦运动规律.

列出方程
$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}\\ u(t,0)=0,u(t,l)=\cos t+\cos 2t\\ u(0,x)=0,u_t(0,x)=0\end{cases}$$

需要将边界条件齐次化, 考虑满足方程的解
$$u=C\cos\omega t\sin\frac{\omega}{a}x$$

可以构造出特解
$$v=\frac{\sin\frac{x}{a}}{\sin\frac{l}{a}}\cos t+\frac{\sin\frac{2x}{a}}{\sin\frac{2l}{a}}\cos 2t$$

令$u=w+v$, 则w满足
$$\begin{cases}w_{tt}=a^2w_{xx}\\ w(t,0)=0,w(t,l)=0\\ w(0,x)=-\frac{\sin\frac{x}{a}}{\sin\frac{l}{a}}-\frac{\sin\frac{2x}{a}}{\sin\frac{2l}{a}},w_t(0,x)=0\end{cases}$$

93

13. 解下列定解问题:

(1) $\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & t>0,\ 0<x<1,\\ u_x(t,0)=1, & u(t,1)=0,\\ u(0,x)=0, & u_t(0,x)=0.\end{cases}$

取特解$v=x-1$使得边界条件齐次化, 令$u=w+v$, 此时w满足
$$\begin{cases}w_{tt}=a^2w_{xx}\\ w_x(t,0)=0,\quad w(t,1)=0\\ w(0,x)=1-x,\quad w_t(0,x)=0\end{cases}$$