一.Bessel 方程：

1. Helmholtz 方程在柱坐标系下变量分离：

ν阶 Bessel 方程：$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$

ν阶 Bessel 方程的通解为：$y(x)=CJ_\nu(x)+DN_\nu(x)$，$0<|x|<+\infty$.

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},\quad N_\nu(x)=\begin{cases}\dfrac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, & \nu\text{不是整数}\\ \lim\limits_{\nu\to m}N_\nu(x), & \nu\text{是非负整数}.\end{cases}$$

若 m 不是整数，通解也可表示成 $y(x)=AJ_\nu(x)+BJ_{-\nu}(x)$.

2. Bessel 函数：

2.1 递推和微分公式：

$(x^\nu J_\nu)'=x^\nu J_{\nu-1}$

$(x^{-\nu}J_\nu)'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}\Rightarrow x^{-(\nu-1)}J_\nu=-\{x^{-(\nu-1)}J_{\nu-1}\}'$，$J_0'=-J_1$

$2J_\nu'=J_{\nu-1}-J_{\nu+1}\Rightarrow J_\nu=J_{\nu-2}-2J_{\nu-1}'$

$2\nu x^{-1}J_\nu=J_{\nu-1}+J_{\nu+1}\Rightarrow J_\nu=2(\nu-1)x^{-1}J_{\nu-1}-J_{\nu-2}$.

2.2 零点和衰减振荡性（P_{116}）.

考虑积分 $\int x^\mu J_\nu(x)\,dx$，利用 $(x^{-\nu}J_\nu)'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}$

$$\int x^\mu J_\nu\,dx=\int x^{\mu+\nu-1}x^{-\nu+1}J_\nu\,dx$$
$$=-x^{\mu+\nu-1}x^{-\nu+1}J_{\nu-1}(x)-(\mu+\nu-1)\int x^{\mu+\nu-2}x^{-\nu+1}J_{\nu-1}(x)\,dx$$
$$=-x^\mu J_{\nu-1}(x)+(\mu+\nu-1)\int x^{\mu-1}J_{\nu-1}(x)\,dx$$

每分部积分一次，幂次降1，Bessel 函数阶数降1. n次后：

$\int x^{\mu-n}J_{\nu-n}(x)\,dx$，若 $(\mu-n)\pm(\nu-n)=1$ 即，$\mu-\nu=1$ / $\mu+\nu=2n+1$.

此积分可表示为有限形式，能用初等方法积出.

若 $\mu\pm\nu\neq$ 奇数时，该积分就比较难：

e.g. $\int_0^z z^\nu J_\nu(z)\,dz=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)z\left[J_\nu(z)H_{\nu-1}(z)-J_{\nu-1}(z)H_\nu(z)\right]$.

ν阶 Struve 函数：$H_\nu(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu+1}$.

这类积分化到 J_1、J_0、$\int J_0\,dx$ 即可.

3. Bessel方程的固有值问题 (P117).

① $N_\nu(x)$ 在 $x=0$ 无界. 故一般不考虑; 同时注意有界性条件.

② 第Ⅱ类边界条件有固有值 $\lambda_0=0$ (S-L定理).

③ 固有函数子 $\{J_\nu(\omega_{1n}r)\}$、$\{J_\nu(\omega_{2n}r)\}$, $\{J_\nu(\omega_{3n}r)\}$ 分别是满足相应边界条件的函数空间里的加权为 r 的完备正交函数子.

④ 模平方: $N_{\nu kn}^2=\int_0^a rJ_\nu^2(\omega_{kn}r)dr$ 会给. 可记可不记.

题目: 15.(1); 16.

二. Legendre方程.

1. Helmholtz方程在球坐标下的变量分离及Legendre方程的导出

m阶伴随Legendre方程: $[(1-x^2)y']'+(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2})y=0$.

$m=0\Rightarrow$ Legendre方程.

$\lambda=l(l+1)$, $l\neq n$ (非负整数), Legendre方程没有在 $x=\pm1$ 都有界的解

$l=n$ (非负整数). $P_n(x)\triangleq\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$

$Q_n(x)\triangleq P_n(x)\int\frac{dx}{(1-x^2)(P_n(x))^2}$, $x\to\pm1$ 时, $Q_n(x)\to\infty$.

$y(x)=CP_n(x)+DQ_n(x)$.

2. Legendre函数:

Rodrigues公式: $P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. Remember!

性质:

① $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$.

$\left[P_n'(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!(n-2k)}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k-1}\right]$

☆. $2^mm!=(2m)!!$

② 特殊点函数值:

$$P_n(0)=\begin{cases}0, & n=2m+1\geq1\\ \frac{(-1)^m(2m-1)!!}{(2m)!!}, & n=2m\geq2\\ 1, & n=0.\end{cases}\qquad P_n'(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{(-1)^k(2k+1)!!}{(2k)!!}, & n=2k+1.\end{cases}\quad k=0,1,2,\cdots$$

$P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$.

③ 零点分布: $P_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有且仅有 n 个互不相同单零点.

递推公式:

$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$ → 计算 $xP_n(x)$.

$nP_n(x)-xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)=0$ → 计算 $x^mP_n(x)$.

$nP_{n-1}(x)-P_n'(x)+xP_{n-1}'(x)=0$; $P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)$ → 计算 $P_n(x)$.

含有 Legendre 多项式的积分:

① $n\geq 2$, $I=\int_0^1 P_n(x)dx=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!}, & n=2k+1\end{cases}$

② $m\geq 1, n\geq 1$:

$$L_{m,n}=\int_0^1 x^m P_n(x)dx=\frac{m}{m+n+1}\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}dx.$$

$$L_{m,n}=\begin{cases}\dfrac{m!}{(m-n)!!(m+n+1)!!}, & m>n.\\ \dfrac{m!(n-m+1)!!}{(m+n+1)!!}\int_0^1 P_{n-m}(x)dx, & m\leq n.\end{cases}$$

证: $m>n$. $L_{m,n}=\dfrac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{(m+n+1)(m+n-1)\cdots[m+n+1-2(n-1)]}\int_0^1 x^{m-n}P_0(x)dx$

$$=\frac{m!}{(m-n)!}\frac{(m-n+1)!!}{(m+n+1)!!}\int_0^1 x^{m-n}dx=\frac{m!}{(m-n)!!}\frac{m-n+1}{(m+n+1)!!}\cdot\frac{1}{m-n+1}$$

$$=\frac{m!}{(m-n)!!(m+n+1)!!}$$

$m\leq n$. $L_{m,n}=\dfrac{m(m-1)\cdots[m-(m-1)]}{(m+n+1)\cdots[m+n+1-2(m-1)]}\int_0^1 x^0 P_{n-m}(x)dx$

$$=\frac{m!(n-m+1)!!}{(m+n+1)!!}\int_0^1 P_{n-m}(x)dx.$$

③ $\int_{-1}^1 x^m P_n(x)dx$. $\quad [\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx=0, n\neq m]$.

$$n\int_{-1}^1 x^m P_n dx=\int_{-1}^1 x^m[xP_n'-P_{n-1}']dx$$

$$=[x^{m+1}P_n-x^mP_{n-1}]\Big|_{-1}^1-\int_{-1}^1(m+1)x^mP_n dx+\int_{-1}^1 mx^{m-1}P_{n-1}dx$$

$$=[(-1)^{n+m+1}-(-1)^{m+n-1}]-\int_{-1}^1(m+1)x^mP_n dx+\int_{-1}^1 mx^{m-1}P_{n-1}dx$$

$$\Rightarrow\int_{-1}^1 x^mP_n dx=\frac{m}{n+m+1}\int_{-1}^1 x^{m-1}P_{n-1}dx$$

Ⅰ. $m<n$, 为0

Ⅱ. $m\geq n$, $\int_{-1}^1 x^mP_n dx=\dfrac{m!}{(m-n)!}\dfrac{(m-n+1)!!}{(m+n+1)!!}\int_{-1}^1 x^{m-n}dx.$

$$=\frac{m![1+(-1)^{m-n}]}{(m-n)!!(m+n+1)!!}.$$

④ 设 $f_k(x)$ 为任意一个 k 次多项式，当 $k<l$ 时都有: $\int_{-1}^1 f_k(x)P_l(x)dx=0$.

3. 轴对称Laplace方程球面边值问题：$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}[C_n r^n+D_n r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta)$ (P_{100}).

题目：8

三. 氢原子.

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(r),\quad \hat{H}\psi=E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]+V(r)\psi=E\psi.$$

设 $\psi=R(r)Y(\theta,\phi)$

径向函数　　角向函数.

$$-\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]=l(l+1).\quad\cdots(1)$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}[E-V(r)]=l(l+1).\quad\cdots(2).$$

(1) 给出角向解：

归一化的球谐函数：

$$Y_{lm}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}\quad\begin{cases}l=0,1,2,\cdots\\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l.\end{cases}$$

$$L^2=-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right],\quad L^2Y_{lm}(\theta,\phi)=l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi).$$

$$L_z=-i\frac{\partial}{\partial\phi},\quad L_zY_{lm}(\theta,\phi)=mY_{lm}(\theta,\phi).$$

$$\begin{cases}\hat{L}^2Y_{lm}(\theta,\phi)=l(l+1)\hbar^2Y_{lm}(\theta,\phi).\\ \hat{L}_zY_{lm}(\theta,\phi)=m\hbar Y_{lm}(\theta,\phi).\end{cases}$$

球谐函数是算符 $\hat{L}^2$ 和 $\hat{L}_z$ 在坐标表象下共同的本征函数

(2). ~~径向~~ 归一化的径向函数

$$R_{nl}(r)=\sqrt{\left(\frac{2Z}{na}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}}\exp\left(-\frac{Z}{an}r\right)\left(\frac{2Z}{an}r\right)^l\underbrace{L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Z}{an}r\right)}_{\text{Laguerre polynomials}}.$$

(confluent hypergeometric function).

因为拉盖尔多项式是合流超几何函数的特例，故 $R_{nl}(r)$ 也可用合流超几何函数表示。

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)=N_{nl}\exp\left(-\frac{Z}{an}r\right)\left(\frac{2Z}{an}r\right)^lL_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Z}{an}r\right)Y_{lm}(\theta,\phi)\quad\begin{cases}n=1,2,3,\cdots\\ l=0,1,2,\cdots,n-1\\ m=0,\cdots,\pm l.\end{cases}$$