中国科学技术大学

2014-2015 学年第二学期数理方程(A)期末考试试卷

1、 设 $a\neq b$ 为实常数，考察二阶线性齐次方程：

$$u_{xx}-(a+b)u_{xy}+abu_{yy}=0 \qquad -\infty<x,y<+\infty$$

（1） 试判断该方程的类型（椭圆 双曲线 抛物线）

（2） 试将该方程化成标准型

（3） 求出该方程的通解

（4） 求出该方程满足的条件：$u(x,-ax)=\varphi(x)$，$u(x,-bx)=\psi(x)$ 的特解，其中 $\varphi(0)=\psi(0)$。

（15’）

2、 考察一阶线性非齐次方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+2x\frac{\partial u}{\partial y}=y,\quad -\infty<x,y<+\infty$$

（1） 求出此方程的特征线；

（2） 求出此方程满足条件 $u(0,y)=1+y^2$ 的解。

（10’）

3、 考察定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x),(0<x<\pi,t>0),\\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=\pi}=0,(t>0),\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),u_t\big|_{t=0}=\psi(x),(0<x<\pi)\end{cases}$$

（1） 当 $f(t,x)=0$ 时，求此定解问题的解 u_1；

（2） 当 $f(t,x)=\sin 2x\sin\omega t$（其中 $\omega\neq 4$），$\varphi(x)=0,\psi(x)=0$ 时，求此定解

问题的解u_2以及$\lim\limits_{\omega\to 4}u_2(x,t,\omega)$的值。

（20’）

4、 考察定解问题:

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0,(r<a,0<\theta<2\pi,0<z<h)\\ u\big|_{r=a}=0,(0<\theta<2\pi,0<z<h)\\ u\big|_{z=0}=g_1(r,\theta),u\big|_{z=h}=g_2(r,\theta),(r<a,0<\theta<2\pi)\end{cases}$$

（1） 当$g_1(r,\theta)=0$，$g_2(r,\theta)=f(r)$时，求此定解问题的解

（2） 当$g_1(r,\theta)=\varphi(r,\theta)$，$g_2(r,\theta)=\psi(r,\theta)$时，可作分离变量:

$u=R(r)\Theta(\theta)Z(z)$，分别求出R,Θ,Z满足的常微分方程，并写出此时与定解问题相应的固有值问题。

（20’）

5、 考察初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta_3 u+3u+f(t,x,y,z),(t>0,-\infty<x,y,z<+\infty)\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),(-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}$$

（1） 求出此问题的基本解;

（2） 当$f(t,x,y,z)=0$，$\varphi(x,y,z)=e^{-(x^2+y^2+z^2)}$时，求此问题的解。

（15’）

6、 已知右半平面区域S=$\left\{(x,y)\big|x>0,-\infty<y<+\infty\right\}$

（1） 求出S内Poisson方程第一边值问题的Green函数;

（2） 求解定解问题:

$$\begin{cases}u_{xx}+25u_{yy}=0,(x>0,-\infty<y<+\infty)\\ u\big|_{x=0}=\varphi(y),(-\infty<y<+\infty)\end{cases}$$

（15’）

7、 求方程：

$Z''(\theta)+\cot\theta Z'(\theta)+20Z(\theta)=0 \quad (0<\theta<\frac{\pi}{2})$,满足条件 $Z(0)=1$ 的解 $Z(\theta)$，并求 $Z(\frac{\pi}{2})$。

（5’）